

Предел последовательности

9 июля

Опр. Дана бесконечная последовательность $\{a_n\}$ вещественных чисел. Число a называется пределом этой последовательности, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой индекс N , что $|a_n - a| < \varepsilon$ при всех $n > N$. В этом случае говорят, что $\{a_n\}$ сходится (или стремится) к числу a и пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

1. Проверьте следующие свойства:

(а) Последовательность не может сходиться к двум числам сразу.

(б) Если последовательность сходится, то любая её (бесконечная) подпоследовательность сходится к тому же числу.

2. Найдите пределы последовательностей:

(а) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$;

(в) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

(б) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}$;

(г) $a_n = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \dots + \frac{1}{k^n}$, где $k \in \mathbb{N}$.

3. (а) Последовательность $\{a_n\}$ сходится. Элементы этой последовательности переставили в произвольном порядке. Докажите, что полученная последовательность тоже сходится.

(б) **Лемма о двух милиционерах.** Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся к одному и тому же числу. Последовательность $\{c_n\}$ такова, что $a_n \leq c_n \leq b_n$ при всех n . Докажите, что $\{c_n\}$ сходится к этому же числу.

4. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся к числам a и b соответственно.

(а) **Предельный переход в неравенствах.** Докажите, что если $a_n < b_n$ при всех n , то $a \leq b$. Приведите пример, когда достигается равенство.

(б) Проверьте любые два из следующих свойств:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n / b_n = a/b, \text{ где } b \neq 0.$$

Лемма Кантора о вложенных отрезках

Пока ещё мы не пользовались тем, что числа именно *вещественные*. Те же самые свойства выполнены, если ограничиться рациональными или даже целыми числами. Отличие вещественных чисел состоит в так называемой аксиоме полноты. Вот одна из её эквивалентных формулировок:

Лемма. Пусть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$ — система вложенных отрезков на вещественной прямой. Тогда их пересечение непусто. Более того, если длины отрезков стремятся к нулю, то в пересечении лежит ровно одна точка.

5. (а) Приведите пример последовательности рациональных чисел $\{a_n\}$, которая сходится к иррациональному числу. **(б)** Приведите пример такой системы вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, которая задаёт иррациональную точку.

6. Докажите, что следующие условия равносильны:

(а) последовательность вещественных чисел $\{a_n\}$ сходится;

(б) для любого натурального k все члены последовательности, кроме конечного числа, лежат в некотором отрезке длины $1/2^k$.

Опр. Будем говорить, что последовательность вещественных чисел $\{a_n\}$ ограничена сверху, если существует такое число C , что $a_n \leq C$ при всех n .

7. (а) Последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху и неубывает. Докажите, что она сходится.

(б) Последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху. Докажите, что среди всех чисел C , которые ограничивают $\{a_n\}$ сверху, найдётся наименьшее¹.

(в) Последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху и снизу. Докажите, что она содержит сходящуюся подпоследовательность.

8. Пусть a и b — два вещественных числа. Докажите, что между ними найдётся **(а)** вещественное; **(б)** рациональное; **(в)** иррациональное число.

9. Найдите пределы последовательностей:

$$\text{(а)} \ a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}; \quad \text{(г)} \ a_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}};$$

$$\text{(б)} \ a_n = (1 - \lambda)^n, \text{ где } \lambda \in (0, 1);$$

$$\text{(в)} \ a_n = \frac{1 + \lambda^n}{(1 + \lambda)^n}, \text{ где } \lambda > 0;$$

$$\text{(д)} \ a_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}.$$

10. Не вычисляя предел, докажите, что следующие последовательности сходятся:

$$\text{(а)} \ a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right); \quad \text{(в)} \ a_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!};$$

$$\text{(б)} \ a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2};$$

$$\text{(г)} \ a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

¹Оно называется *супремумом* $\sup a_n$ или *точной верхней гранью* множества $\{a_n\}$. Двойственное понятие называется *инфимумом* $\inf a_n$ или *точной нижней гранью*.